

XIII Potyczki Matematyczne

Konkurs dla uczniów szkół średnich organizowany przez Studenckie Koło Naukowe Matematyków UMCS
"Akademia Platońska"

Zadanie 1. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie czwórki (a, b, c, k) liczb całkowitych takie, że spełniona jest równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8k + 7$$

Zadanie 3. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pokazać, że równanie

$$a \sin^2(x) + b \sin(x) \cos(x) + c \cos^2(x) = \frac{a+c}{2}$$

ma zawsze pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 4. Niech $Z(n)$ oznacza liczbę zer na końcu liczby $n!$, czyli przykładowo $Z(4) = 0$, $Z(5) = 1$. Wyrazić wzorem zwartym $Z(10^n)$ za pomocą $Z(2^n)$ oraz elementarnych operacji i funkcji (np. suma, różnica, wielomian, potęga). Ile zer znajduje się na końcu liczby $10^{21}!$ (tryliard silnia)?

Zadanie 5. Wykaż, że nie istnieją liczby całkowite, których kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Zadanie 6. Rozwiązać poniższe równanie w zbiorze liczb rzeczywistych

$$x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

Rozwiązania zadań prosimy przysyłać pocztą tradycyjną w terminie do 21 kwietnia 2017 roku włącznie (decyduje data stempla pocztowego) na adres: dr Agnieszka Kozak-Prus Instytut Matematyki UMCS pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1 20-031 Lublin